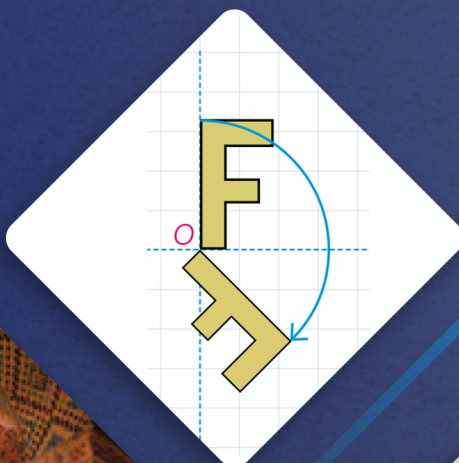


دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۲

هندسه ۲ (رشته ریاضی و فیزیک)



● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

سید محمد سید شاکری
امیر محمد سید شاکری
سید محمد سید شاکری
سید محمد سید شاکریگروه
ریاضیحسابان و
ریاضی پایهمسئول درس: علیرضا فاطمی
دستیار: مهدی پوررضایی

حسین شفیع زاده • علیرضا فاطمی • سید امیرمحمد سید شاکری

هندسه

مسئول درس: محمد تقی پور
دستیار: هادی کاظم نژادسیدمحسن میراسلامی • امیدرضا پورحسینی • هادی کاظم نژاد
سعید اکبرزادهریاضیات
گسستهمسئول درس: حسین اسدزاده
دستیار: مریم حسینی

سعید اکبرزاده • سوگند روشنی • پرمیدا هادی پور

ریاضی
تجربیمسئول درس: امیرحسین شریفیان
دستیار: امین کبیری

ایمان اردستانی • محمد خان گلدی

ریاضی
انسانیمسئول درس: عباس سعیدی
دستیار: امیرحسین حریریامیدرضا پورحسینی • محمد منتظران • حسین خواجه وند
حسین افسری • مجید یوسف زادهزیست
شناسی

مسئول درس: علی جوهری

امیر کبیری راد • منصوره رئیس دانا • بتول خواجه پور

فیزیک

مسئول درس: مهدی نیکوگفتار

احمد رضوانی • مهرناز طلوع شمس • مریم حیدری
یوسف صباغی

شیمی

مسئول درس: محمد وحیدی

شهرام شاه پرویزی • محمد وحیدی • سبحان دقیق
محمدعلی توسلی فرزمین
شناسی

مسئول درس: شکبیا کریمی

فرزانه رجایی • حسن علی محمدی

انسان و
محیط زیست

مسئول درس: شکبیا کریمی

محبوبه کاظمی

سلامت و
بهداشت

مسئول درس: علیرضا رضایی نیا

علیرضا رضایی نیا

گروه
علومسید محمد حسین کشانی
سید محمد حسین کشانی
سید محمد حسین کشانی
سید محمد حسین کشانی

طراحان



● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

طراحان

گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷گروه
عمومیادبیات
فارسیمسئولین درس:
عماد فیض آبادی
محسن ابراهیم تهرانیابوالفضل غلامی • افشین محی الدین • احسان محسنی
عماد فیض آبادی • محسن ابراهیم تهرانیدین و
زندگیمسئولین درس:
علی اکبر آخوندی
زهره محمدیمحمد کریمی • علیرضا دلشاد • علی اکبر آخوندی
زهره محمدی • محبوبه ابتهسامزبان
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری • سعید ابراهیمی • امین امیدوار

علوم و
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

فاطمه اکران • گلاویژ جلالی • مینا پژنگ
مهرآوه مجتهدجامعه
شناسیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفریفروغ تیموریان • آریتا بیدقی • علیرضا مختاری
الهام میرزایی • آزاده میرزایی • الهام رضاییروان
شناسیمسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانی

مهدی پارچه باف

زبان
عربیمسئولین درس:
پویا رضاداد
مائده خدایاری
دستیار: سارا حمزهاسرافیل قربان پور • محسن احدی • کیارش پورمهدی
امینه کارآمد • زهرا فرزانه

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسبمهسا اصغری • سامان بهری • زهره قموشی
الهه ریاحی نسب

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهرروز یحیی • مهسا اصغری • الهه ریاحی نسب

فلسفه
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری • حسین صادقی • سیاوش خداشناس

اقتصاد

مسئول درس: امیر محمدبیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

آیدانا رستمی

هویت
اجتماعیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

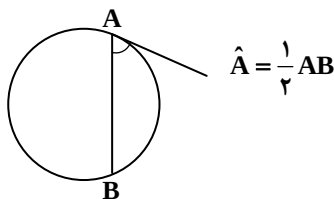
رضا کیانپور

گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷

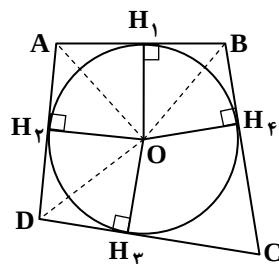


-۱

الف) درست؛ اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه روی آن زاویه.



ب) درست؛ در چهارضلعی ABCD زیر، نیمسازهای سه زاویه A، B و D در نقطه O هم‌رس هستند، می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، پس:



$$B \text{ روی نیمساز } O : OH_1 = OH_4$$

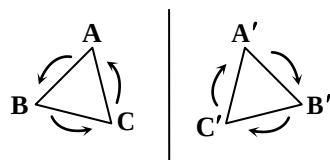
$$A \text{ روی نیمساز } O : OH_1 = OH_2$$

$$D \text{ روی نیمساز } O : OH_2 = OH_3$$

از روابط فوق، داریم:

$$OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH_1 بر هر چهارضلع ABCD مماس است و چهارضلعی ABCD محیطی است.



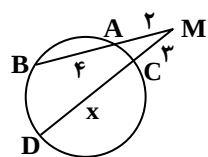
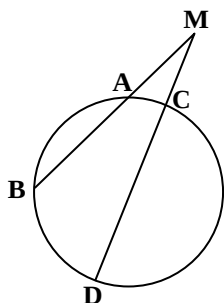
ج) نادرست؛ در دوران، اندازه زاویه تغییر نمی‌کند.

د) نادرست؛ در بازتاب جهت شکل حفظ نمی‌شود.

-۲

الف) ۱

نکته: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M بیرون دایره یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow 2 \times 6 = 3(3+x)$$

$$\Rightarrow 12 = 3(3+x) \Rightarrow 4 = 3+x \Rightarrow x=1$$

ب) $4\sqrt{2}$

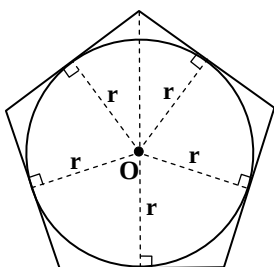
می‌دانیم در دو دایره مماس خارج با شعاع‌های R و R'، اندازه مماس مشترک خارجی برابر $2\sqrt{RR'}$ است، پس داریم:

$$\text{اندازه مماس مشترک خارجی} = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{2 \times 4} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

ج) ۲/۸

نکته: اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، داریم:

$$S = Pr \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$



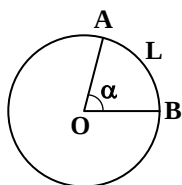
در چندضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P، شعاع دایره محاطی r برابر است با:

$$S = 28, 2P = 20 \Rightarrow P = 10 \Rightarrow r = \frac{S}{P} = \frac{28}{10} = 2.8$$

د) نقطه ثابت تبدیل

الف) گزینه ۳

نکته: ناحیه ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می نامند.
اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد، مساحت قطاع برابر است با:



$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

در چهارضلعی OMAM' زوایای $\hat{M}$ و $\hat{M}'$ قائمه هستند، پس داریم:

$$\hat{O} + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{O} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{O} = 120^\circ$$

مساحت قطاع OMM' برابر است با:

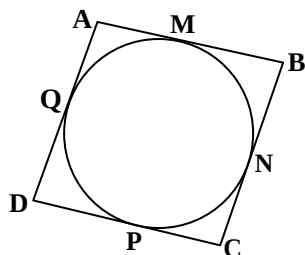
$$S_{OMM'} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$$

ب) گزینه ۱

راه حل اول:

نکته: یک دوزنقه محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

نکته: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل دیگر باشند.



$$ABCD \text{ محیطی است} \Leftrightarrow AB + DC = AD + BC$$

دوزنقه ABCD محاطی است، طبق نکته فوق، متساوی الساقین است. از طرفی چون محیطی است، داریم:

$$AB + CD = AD + BC \xrightarrow{AD=BC} 2 + 4 = 2AD \Rightarrow AD = 3$$

در مثلث ADH، داریم:

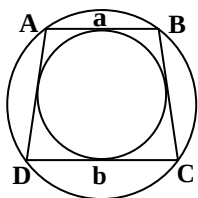
$$AH^2 + DH^2 = AD^2 \Rightarrow AH^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow AH^2 = 8 \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}$$

حال مساحت دوزنقه را می یابیم:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AH}{2} = \frac{(2 + 4) \times 2\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

راه حل دوم:

نکته: در یک دوزنقه که هم محیطی و هم محاطی است، مساحت برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضربدر میانگین هندسی آن ها.

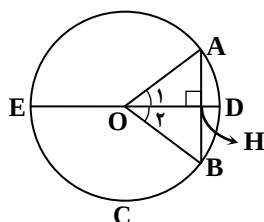


$$S_{ABCD} = \left(\frac{a+b}{2}\right) \sqrt{ab}$$

با استفاده از نکته فوق، چون دوزنقه ABCD هم محاطی و هم محیطی است، داریم:

$$S_{ABCD} = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) \times \sqrt{AB \cdot CD} = \left(\frac{2 + 4}{2}\right) \times \sqrt{2 \times 4} = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

در شکل مقابل، طبق فرض داریم: $ED \perp AB$ ، حال با وصل کردن مرکز دایره به نقاط A و B در مثلث های OAH و OBH، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \text{ : شعاع دایره} \\ OH = OH \text{ : مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \triangle OAH \cong \triangle OBH$$

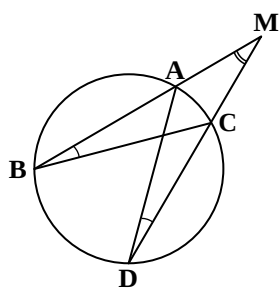
طبق تساوی اجزای متناظر، داریم:

$$\begin{aligned} AH &= BH \\ \hat{O}_1 &= \hat{O}_2 \Rightarrow AD = DB \end{aligned}$$



-۵

در شکل مقابل، A را به D و C را به B وصل کرده و ثابت می‌کنیم دو مثلث MAD و MBC متشابه هستند.



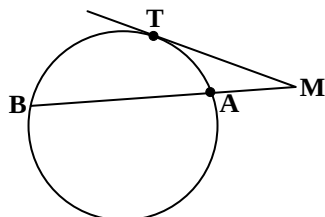
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \frac{1}{2} \widehat{AC} \\ \hat{D} = \frac{1}{2} \widehat{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} = \frac{1}{2} \widehat{AC} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MCB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

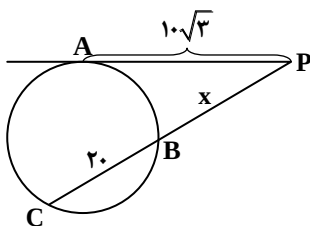
$$\Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

-۶

نکته: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع.



$$MT^2 = MA \cdot MB$$



طبق شکل مقابل، با فرض $PB = x$ و استفاده از نکته فوق، داریم:

$$PA^2 = PB \cdot PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(x+20) \Rightarrow 300 = x^2 + 20x \Rightarrow x^2 + 20x - 300 = 0$$

$$\Rightarrow (x+30)(x-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -30 \\ x = 10 \end{cases}$$

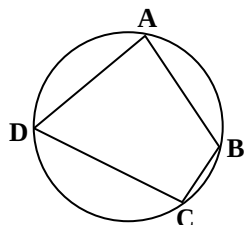
غیرقابل قبول

پس:

$$PB = x = 10, PC = x + 20 = 10 + 20 = 30$$

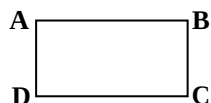
-۷

نکته: یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.



$$ABCD \text{ محاطی است} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

روش اول: طبق نکته فوق، چون متوازی‌الاضلاع ABCD محاطی است، داریم:



$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \quad (1)$$

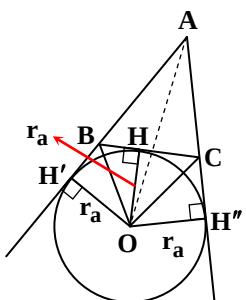
از طرفی در متوازی‌الاضلاع، زوایای مقابل برابرند، پس:

$$\hat{A} = \hat{C} \xrightarrow{(1)} 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \xrightarrow{\text{به همین ترتیب ثابت می‌شود}} \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \Rightarrow ABCD \text{ مستطیل است.}$$

روش دوم: یا می‌دانیم متوازی‌الاضلاع که یک زاویه قائمه داشته باشد، مستطیل است.

-۸

در شکل زیر، داریم:



$$OH = OH' = OH'' = r_a \quad (1)$$

مساحت مثلث ABC را به صورت زیر نوشته و داریم:

$$S_{ABC} = S_{AOC} + S_{AOB} - S_{BOC} \xrightarrow{(1)} S_{ABC} = \frac{1}{2} r_a \cdot AC + \frac{1}{2} r_a \cdot AB - \frac{1}{2} r_a \cdot BC$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} r_a (AC + AB - BC) = \frac{1}{2} r_a (AC + AB + BC - 2BC)$$

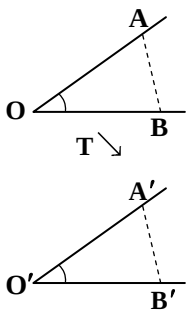
چون $S_{ABC} = S$ و $2P = AB + AC + BC$ و $BC = a$ ، داریم:

$$S = \frac{1}{2} r_a (2P - 2a) = \frac{1}{2} r_a \times 2(P - a) \Rightarrow S = r_a (P - a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{P - a}$$

-۹

الف) تبدیل‌هایی که طول پاره خط را حفظ می‌کنند، تبدیل طولی (ایزومتري) نامیده می‌شوند.

ب) طبق شکل مقابل، زاویه O' تصویر زاویه O تحت تبدیل طولی T است. اگر A' تصویر A ، B' تصویر B و O' تصویر O باشند، چون تبدیل T ، طولی است، داریم:

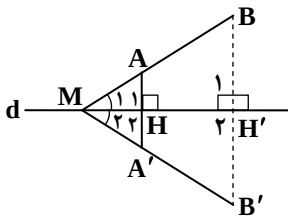


$$\left. \begin{array}{l} OA = O'A' \\ OB = O'B' \\ AB = A'B' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \Rightarrow \hat{O} = \hat{O}'$$

سه ضلع

-۱۰

پاره خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب d را در نقطه M قطع کند. بازتاب A نسبت به خط d یافته و B' می‌نامیم. M را به B' وصل می‌کنیم. ثابت می‌کنیم بازتاب A نسبت به خط d روی MB' قرار دارد. از A به خط d عمود رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا MB' را در A' قطع کند. چون B' بازتاب B نسبت به خط d است، پس خط d عمود منصف پاره خط BB' است و طبق خواص عمود منصف، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ MH = MH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAH \cong \triangle MA'H \Rightarrow A'H = AH$$

زض

بنابراین d ، عمود منصف AA' می‌باشد و این بدین معنی است که A' بازتاب A نسبت به خط d است.

$$MB' = MB \Rightarrow MB' = MB \quad (1)$$

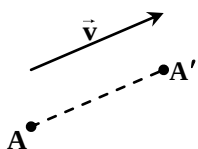
$$MA' = MA \Rightarrow MA' = MA \quad (2)$$

$$MB' - MA' = MB - MA \Rightarrow A'B' = AB$$

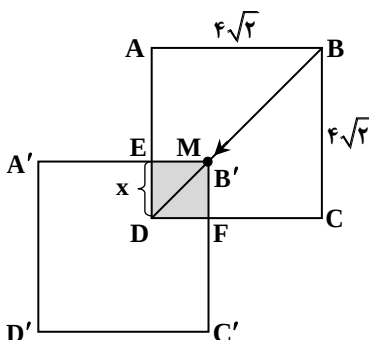
-۱۱

نکته: انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند

$$A' \text{ در همان صفحه است که } \vec{AA'} = \vec{v}$$



طبق شکل مقابل، مربع $A'B'C'D'$ انتقال یافته مربع $ABCD$ تحت بردار $\vec{BM}$ است. ابتدا قطر BD را می‌یابیم.



$$BD = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8$$

$$\frac{BM}{MD} = 2 \Rightarrow BM = 2MD$$

$$BD = BM + MD \Rightarrow 8 = 2MD + MD \Rightarrow 8 = 3MD \Rightarrow MD = \frac{8}{3}$$

اگر ضلع مربع $EMFD$ را x در نظر بگیریم، داریم:

$$MD = x\sqrt{2} \Rightarrow \frac{8}{3} = x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow S_{EMFD} = x^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$$

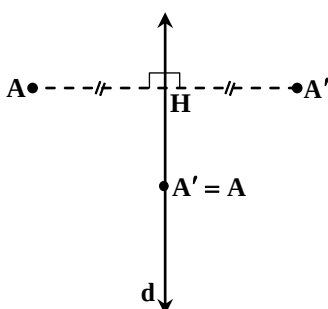
تذکر: مساحت مربع $EMFD$ برحسب قطر مربع به صورت زیر است:

$$S_{EMFD} = \frac{1}{2}MD^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$$

-۱۲

نکته: برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d ، کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم:

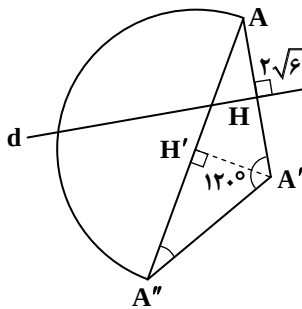
$$S(A) = A'$$





راه حل اول:

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.



در شکل مقابل، A' بازتاب A نسبت به خط d است. طبق خواص بازتاب، داریم:

$$AH = A'H = 2\sqrt{6}$$

$$AA' = 2AH = 2 \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

A'' دوران یافته A به مرکز A' و زاویه 120° است. طبق خواص بازتاب، داریم:

$$A'A'' = A'A = 4\sqrt{6}$$

در A' ارتفاع $A'H'$ را بر AA'' رسم کرده و داریم:

$$H'\hat{A}A'' = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ \xrightarrow{\text{در مثلث } A'HA''} \hat{A}'' = 30^\circ$$

$$\triangle A'H'A'': \cos 30^\circ = \frac{A''H'}{A'A''} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A''H'}{4\sqrt{6}} \Rightarrow A''H' = \frac{4\sqrt{18}}{2} = 2\sqrt{18} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

در مثلث متساوی الساقین $AA'A''$ ، ارتفاع $A'H'$ ، میانه نیز می باشد، پس:

$$AA'' = 2A''H' = 2 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

راه حل دوم:

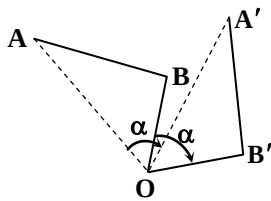
همچنین می توانستیم برای به دست آوردن $A''H'$ از قضیه فیثاغورس در یکی از مثلث های $AA'H'$ یا $A'H'A''$ استفاده کنیم.

$$A'' = 30^\circ \Rightarrow \frac{A'H'}{A'A''} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow A'H' = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\triangle A'A''H': A''H'^2 = A'A''^2 - A'H'^2 = (4\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{6})^2 = 72 \Rightarrow A''H' = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \Rightarrow AA'' = 2A''H' = 12\sqrt{2}$$

-۱۳

در شکل زیر A' و B' دوران یافته A و B به مرکز O و زاویه α هستند. داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{AOA}' = \alpha \\ \hat{BOB}' = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{AOA}' = \hat{BOB}' \quad (1)$$

زاوای $\hat{AOB}$ و $\hat{A'OB'}$ برابرند؛ زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{AOB} = \hat{AOA}' - \hat{BOA}' \\ \hat{A'OB'} = \hat{BOB}' - \hat{BOA}' \end{array} \right\} \xrightarrow{(1)} \hat{AOB} = \hat{A'OB'}$$

با توجه به اینکه شعاع دوران ثابت است، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \hat{AOB} = \hat{A'OB'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow AB = A'B'$$